Альманах современной науки и образования, Грамота. Тамбов. 2012. №11. С. 184-192.

УДК 53.02:531.3

# Обобщение экстремальных принципов физики

Терехович Владислав Эрикович

Кафедра философии науки и техники, Философский факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет
v.terekhovich@gmail.com

*В статье дается краткий исторический обзор основных экстремальных принципов классической механики, электродинамики, теории относительности и квантовой механики. Все принципы приводятся в общей математической форме с простыми формулировками, что позволяет сравнить их друг с другом и представить частным случаем квантового метода «интегралов по траекториям». Приводится обобщенная вероятностная формулировка экстремальных принципов физики.*

**Ключевые слова и фразы:** принцип наименьшего действия, принцип Гамильтона, интегралы по траекториям Фейнмана, обобщение физических законов.

**Введение.**

Экстремальные или вариационные принципы играют ключевую роль в большинстве разделов физики. Их можно свести к общей форме: действительное движение или состояние системы отличается от всех возможных при данных граничных условиях тем, что некий функционал, характеризующий систему в целом, стационарен и принимает экстремальное значение. Каждый экстремальный принцип имеет простую математическую форму, из которой выводятся уравнения движения или состояния системы. Функционалы в этих принципах имеют размерность «энергия х время» и являются инвариантом относительно преобразований пространства-времени, благодаря чему выражают взаимосвязь принципов симметрии, сохранения и причинности [17, с. 169]. Экстремальные принципы переводят на язык математики философские понятия «возможность» и «действительность». Они используют описание физических процессов как через действующие, так и через целевые причины.

Возможно, по этим причинам, экстремальные принципы не вписываются в философские основания доминирующих научных парадигм. Их не удается вывести из других принципов, иначе как, приняв за аксиому “«предпочтение» природы развиваться экстремальными путями к экстремальным состояниям” [1, с. 210]. Ричард Фейнман обращал внимание, что по своей сути принцип наименьшего действия – принцип философский и изучаться может только путем философского обобщения [20]. Сегодня непостижимая эффективность вариационных принципов стала своеобразным символом веры физиков теоретиков [5].

Уникальную эвристическую роль экстремальных принципов, особенно принципа наименьшего действия в описании поведения физических систем отмечали М. Планк, Л. Де Бройль, Э. Шредингер, Д. Бом. Большая часть разделов курса «Теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е.М. Лифшица начинаются с этого  принципа. В литературе по философскому анализу экстремальных принципов ключевое место занимают работы Л. С. Полака [3; 15] В. А. Ассеева [1] и О. С. Разумовского [16; 17]. Фейнман [19–22] и другие ученые [7, 23, 27, 35] излагали свое мнение о философском смысле этих принципов. Свою концепцию развивает В.Э. Терехович [18].

Общим недостатком существующей литературы является ее ограниченность практическим применением экстремальных принципов или их методологической ролью в отдельно взятой области физики. Видимую схожесть этих принципов авторы объясняют вычислительным удобством или разнообразными философскими аксиомами. Практически отсутствуют попытки за общей математической формой обнаружить единый физический смысл всех экстремальных принципов и ответить на ряд вопросов. Например, что объединяет различные экстремальные принципы, кроме их математической формы? Можно ли их привести к универсальному виду? В чем физический смысл возможных траекторий и перемещений? В чем физический смысл понятий «действие» и, почему оно стремится к экстремальным значениям?

Для ответа на подобные вопросы основные экстремальные принципы физики необходимо привести к единой форме, что облегчит их сравнение. Для понимания физической связи между разными экстремальными принципами важно проследить историю их возникновения и ход рассуждений их создателей. Статья состоит из трех разделов, посвященных экстремальным принципам в классической механике, электродинамике, теории относительности и квантовой механике. В заключении все принципы приводятся к обобщенной вероятностной форме, основанной на методе «интегралов по траекториям» Р. Фейнмана.

**Экстремальные принципы в механике.**

Леонард Эйлер упоминал о древнейших философах и последователях Аристотеля, установивших, что природа во всех своих проявлениях избирает кратчайший или легчайший путь [3, с. 99]. Герон Александрийский в I веке до н.э. сформулировал принцип кратчайшего пути для случая отражения света. Пьер Ферма в 1662 году вывел принцип кратчайшего времени распространения света *T* между точками *A* и *B*, из которого выводятся все законы геометрической оптики (для однородной среды этот путь – прямая):

$T = \min,\ T = \int_A^B \frac{1}{V} ds$, где $V$ - скорость распространения света, $ds$ – элемент пути света.

Готфрид Лейбниц определил величину, которая может быть минимальной или максимальной в процессе движения и назвал его «действие» [3, с. 22], оно равно произведению массы, скорости и длины пути *mvs,* или массы, квадрата скорости и времени $mv^2t$. Решение практических задач по нахождению пути, занимающему наименьшее время (И. Ньютон, И. Бернулли, Л. Эйлер, Ж.Лагранж), привело к возникновению вариационного исчисления. Его задачей является нахождение функции, удовлетворяющей условию стационарности некоторого функционала, то есть такой функции, бесконечно малые возмущения которой не вызывают изменения этого функционала в первом порядке малости. В большинстве случаев стационарное значение функционала совпадает с его локальным экстремумом (чаще всего минимумом, но иногда и максимумом) на линиях и поверхностях, который выражается через некоторые интегралы.

Например, для шарика, катящегося по дну небольшого прямого желобка, любое малое отклонение в сторону от дна желобка практически не изменяет его высоты *h*. Запись вариации $\delta h = 0$ означает, что разность между действительным значением *h* и любым возможным *h*\` в первом порядке приближения (малости) равна нулю. Это условие выполняется в случае, когда на всем протяжении пути шарика его высота в желобке будет минимальной или стационарной. Все вариационные принципы принято разделять на дифференциальные и интегральные. Первые рассматривают состояние системы в отдельные моменты времени и устанавливают, чем действительное движение системы отличается от кинематически возможных движений в каждый момент времени. Вторые рассматривают весь путь системы целиком между конкретными точками в пространстве или во времени и устанавливают, чем действительное движение системы отличается от кинематически возможных движений, совершаемых системой за конечный промежуток времени.

Пьер Мопертюи в 1744 году сформулировал принцип наименьшего действия, применимый, по его мнению, для всех случаев движения: «Когда в природе происходят некоторые изменения, количество Действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным» [3, с. 53]. Принцип Ферма для Мопертюи – частный случай нового принципа: $mvs = \min$ .

Эйлер записал этот принцип в математической форме, из которой получил привычные уравнения механики. Он показал, что из всех возможных траекторий от точки $A$ в точку $B$, описываемых телом под действием центральных сил за один и тот же промежуток времени, некий интеграл всегда равен максимуму или минимуму. Или на языке вариационного исчисления – при любом малом изменении траектории вариация действия $S_o$ равна нулю. Данный принцип используется для нахождения реального времени пути системы в обобщенных координатах без учета того, как система перемещается по этой траектории:

$S_0 = \min, \ \ \delta S_0 = 0, \ \ S_0 = \int_A^B mvds$ , где $v$ – скорость, $m$ – масса, $ds$ – элемент траектории.

Или в современных выражениях:

$S_0 = \int_A^B pdq$ , где $p$ – импульс, $q$ – обобщенная координата.

Новый принцип эквивалентен принципу статики, согласно которому система стремится к состоянию с минимумом потенциальной энергии. Жозеф Лагранж расширил принцип на произвольную систему взаимодействующих точек, поэтому его называют **принципом Мопертюи-Лагранжа**:

$$\sum m_i \int v_i ds_i = \min, \ \ \delta \sum m_i \int v_i ds_i = 0 .$$

Лагранж сформулировал дифференциальный вариационный **принцип виртуальных скоростей**, известный еще как **принцип возможных перемещений** или **принцип виртуальной работы,** из которого можно вывести все теоремы статической механики. Согласно ему, действительное состояние равновесия любой механической системы с идеальными связями отличается от всех других возможных для нее состояний тем, что сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил, в т.ч. реакций связей, при любом возможном перемещении системы равна нулю:

$\sum F_i \delta s_i = 0$ , где $F$ – активные силы, $\delta s$ – возможные перемещения.

Используя идею Д`Аламбера о введении сил инерции, Лагранж получил обобщенный дифференциальный **принцип Д`Аламбера-Лагранжа**, из которого он в качестве следствия получил все теоремы динамики, статики и принцип наименьшего действия. Согласно новому принципу действительное движение механической системы отличается от всех кинематически возможных тем, что только для него сумма элементарных работ всех активных сил, в т.ч. реакций связей и сил инерции на любом возможном перемещении системы в каждый момент времени равна нулю:

$\sum(F_i + J_i)\delta s_i = 0,\ J_i = -m_i w_i$, где $J$ - силы инерции, $m$ - масса, $w$ – ускорение.

Этот принцип является единственным постулатом аналитической механики, из которого следует не только условие равновесия, но и условие устойчивости системы – так называемая **теорема Лагранжа-Дирихле**, согласно которой состояние равновесия механической системы характеризуется стационарностью потенциальной энергии:

$\delta U = 0$, где $U$ – потенциал.

Для необратимых перемещений равновесие устойчиво, если потенциальная энергия имеет относительный минимум $U = \min$, что соответствует условию $\delta U \geq 0$, в то время как в общем случае для равновесия обратимых перемещений требуется не минимальность, а лишь стационарность $U$ [11, с. 100-110].

В 1755 году Лагранж завершил работу Эйлера, связав принцип наименьшего действия с дифференциальным уравнением механики (оно так и называется – **уравнение Эйлера-Лагранжа**). Необходимым и достаточным условием стационарности интеграла

$$\int F(y, y', x)dx$$

является выполнение дифференциального уравнения [11, с. 83]:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,.$$

Уильям Гамильтон в 1827 году пришел к выводу, что все закономерности геометрической оптики можно вывести из одного принципа, обобщающего принцип Ферма и принцип наименьшего действия. Используя формулы Эйлера и Лагранжа, Гамильтон находит для луча света характеристическую функцию $l$ так, чтобы условие ее вариации давало реальную траекторию луча между точками $A$ и $B$:

$l = \min,\ \delta l = 0,\ l = \int_A^B v ds$ или $T = \min,\ \delta T = 0,\ T = \int_A^B dt$, где $T$ – время.

Такая форма согласовывалась как с волновыми (Гюйгенс), так и с корпускулярными (Ньютон) представлениями о природе света. В первом случае величину $v$ можно рассматривать как преломляющую силу среды (показатель преломления), тогда $l$ – это оптическая длинна пути света пропорциональная времени. Во втором случае $v$ можно рассматривать как скорость частицы света (принцип наименьшего действия). Отсюда

Гамильтон сделал вывод, что ни та, ни другая теория не дает истинного представления о сущности света [1, с. 36].

Будучи уверенным в аналогии оптических и механических явлений, Гамильтон в 1834 году применил новую форму принципа наименьшего действия к динамике, за что, кстати, был избран членом-корреспондентом Российской академии наук. Вместо интеграла по пути от количества движения *mv* Гамильтон вводит интеграл по времени от функции, обычно называемой «функцией Лагранжа» или «лагранжианом», такой чтобы условие вариации этого интеграла давало бы реальное движение системы из момента $t_1$ в момент $t_2$:

$S = \min,\ \delta S = 0,\ S = \int_{t1}^{t2} L dt$, где $S$ – действие, $L$ - лагранжиан.

Для консервативной системы (закон сохранения энергии выполняется) функция Лагранжа выражается как разность кинетической энергии и потенциальной энергии: $L = T - U$. Согласно **принципу Гамильтона**, из всех возможных виртуальных перемещений системы из одного состояния в другое за один и тот же промежуток времени, действительным является то, для которого действие будет стационарным и локально наименьшим. Данная форма принципа используется для нахождения реального пути системы как функции времени. В отличие от формы Мопертюи, форма Гамильтона в общем случае не требует сохранения полной энергии системы и не рассматривает пространственные координаты, что позволяет применять его не только к механическим системам. Принцип Гамильтона применим для так называемых голономных связей - налагающих ограничения только на положения (или перемещения за время движения) точек и тел системы, но не на величины их скоростей.

Михаил Васильевич Остроградский в 1848 году вывел принцип наименьшего действия без допущения Гамильтона о стационарности или голономности связей системы. Принцип работал и для неконсервативных систем, где закон сохранения энергии не имеет места. Поэтому обобщенный принцип наименьшего действия часто называют **принципом Гамильтона-Остроградского**, где лагранжиан выражается как:

$L = \delta T + \sum F_i \delta s_i$, где $T$ – кинетическая энергия, $F$ – активные силы.

Карл Густав Якоби использовал понятие полной энергии системы $E = T + U$ и нашел форму принципа наименьшего действия, связанную с геометрией обобщенного пространства, согласно которой действительное перемещение частицы является геодезической (кратчайшей) линией и отличается от всех возможных перемещений тем, что действие Якоби является стационарным и локально минимальным:

$$Sj = \min,\ \delta S_j = 0,\ S_j = \int_A^B \sqrt{2(F+E)}ds$$, где $F$ – силовая функция активных сил.

По сути, это обобщение закона инерции Галилея, согласно которому под действием собственной инерции частица движется по прямой линии и с постоянной скоростью. Оказалось, что этот закон верен не только для 3-х мерного, но и для n-мерного искривленного риманова пространства [11, с. 167]. **Принцип Якоби** – механический аналог принципа Ферма в оптике, поскольку механические траектории консервативных систем могут быть получены с помощью построения ортогональных траекторий к поверхностям *S=const*. Это построение аналогично построению волнового фронта и световых лучей в геометрической оптике. Поверхности равного времени в оптике соответствуют поверхностям равного действия в механике, а принцип наименьшего времени Ферма - принципу наименьшего действия или принципу Якоби. И оптические и механические явления могут быть описаны как с помощью волн, так и с помощью частиц [11, с. 314].

Карл Гаусс в 1829 году развил принцип Д`Аламбера так, чтобы он не был связан с минимальностью какой-либо функции системы, и сформулировал дифференциальный экстремальный **принцип наименьшего «принуждения».** Вместо вариации по координатам, он проводит вариацию по ускорениям:

$\sum (F_i + J_i)\delta w_i = 0$, где $F$ – активные силы, $J$ – силы инерции, $w$ – ускорение.

Затем Гаусс ввел величину *Z*, назвав ее «мерой принуждения», которая для действительного движения принимает наименьшее возможное значение из всех значений, совместимых с данными кинематическими связями» [7]. В результате он получил, что действительное движение системы материальных точек, связанных между собой и подверженных влияниям, в каждое мгновение отличается от возможных движений тем, что принуждение стационарно и имеет минимум:

$$Z = \min,\ \delta Z = 0,\ Z = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\frac{F_i}{m_i} - w_i\right)^2 .$$

Физический смысл принципа Гаусса состоит в том, что система движется так, чтобы максимально сохранить свободу всех своих точек от влияния (принуждения) связей системы. Из принципа Гаусса следует, что точка будет двигаться вдоль пути с наименьшей кривизной. В отличие от принципа наименьшего действия, принцип Гаусса может использоваться при неголономных связях или непотенциальных силах [11, с. 134].

Ф. Журден в 1903 году предложил принцип, аналогичный принципам Д`Аламбера и Гаусса, но в котором варьируется не координата и не ускорение, а скорость. Согласно

**принципа Журдена** из всех кинематически возможных движений механической системы с идеальными связями действительным является то, для которого в каждый момент времени выполняется условие:

$$\sum (F_i - m_i w_i)\delta v_i = 0\,.$$

В 1893 году Генрих Герц на основе идей Якоби и Гаусса разработал дифференциальный экстремальный **принцип кратчайшего пути** или **принцип наименьшей кривизны**, сводя задачи механики к проблеме геодезических линий, тем самым геометризируя классическую динамику [3, с. 849]. Герц показал, что когда приложенные силы равны нулю, мера принуждения $Z$ может быть интерпретирована как «геодезическая кривизна» траектории точки в трехмерном евклидовом пространстве. Действительная траектория отличается от всех возможных – совместимых со связями системы траекториями тем, что ее кривизна имеет локальный минимум. Иначе говоря, точка при движении стремится уменьшить кривизну своей траектории в каждой точке до минимального значения, допускаемого связями [11, с. 134]. Из своего принципа Герц вывел принципы Мопертюи-Лагранжа, Гамильтона и Якоби. Для Герца естественным движением материальной системы является движение по кратчайшему пути с постоянной скоростью или по пути с наименьшей кривизной, что эквивалентно принципу Ферма. Эта идея нашла свое продолжение в общей теории относительности.

**Экстремальные принципы в электродинамике и теории относительности.**

Поставив целью свести электродинамику Максвелла и электронную теорию к единым динамическим принципам, ряд ученых (Дж. Лармор, К. Шварцшильд, Г. Лоренц, Г. Ми) достигли этого, найдя соответствующее выражение для функции Лагранжа в принципе наименьшего действия [3, с. 587]. Вместо лагранжиана, интегрируемого по координате, использовалась плотность лагранжиана, интегрируемая по всему объему. Оказалось, что электростатическое поле (распределение потенциала $\varphi$ в пространстве) легко описать не только при помощи дифференциальных уравнений, но и через требование стационарности и минимума действия поля $S_f$:

$$S_f = \min,\ \delta S_f = 0,\ S_f = \int L_f dt,\ L_f = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V (\nabla\varphi)^2 dV\,,$$

где $L_f$ – лагранжиан поля, $\varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость.

Отсюда следует **принцип минимума полной энергии поля**, по которому «правильное поле и есть то единственное, которое из всех полей, получаемых как градиент потенциала, отличается наименьшей полной энергией» [21, с. 115]. Иначе говоря, объемный интеграл действия, равного полной энергии поля, для истинного распределения значений потенциалов поля имеет минимум, что аналогично теореме Лагранжа-Дирихле для механических систем. Если же в электростатическом поле движется заряд, то в соответствии с **принципом наименьшего действия для такого заряда** сумма действия поля $S_f$, действия заряда $S_m$ и действия его взаимодействия с зарядом $S_{mf}$ стационарна и имеет минимум:

$$S = \min, \quad \delta S = 0, \quad S = S_f + S_m + S_{mf}, \quad S = \int L dt$$

$L = L_f + L_m + L_{mf} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_V (\nabla\varphi)^2 dV + \int\limits_V \frac{1}{2} m v^2 dV - \int\limits_V \rho\varphi dV$, где $L_m$ – лагранжиан заряда, $L_{mf}$ – лагранжиан взаимодействия зарядов и поля, $\rho$ – объемная плотность заряда.

Для построения теории любого поля, необходимо было учесть скорость движения заряженной частицы. Причем сделать это необходимо с учетом уравнений теории относительности, т.е. в релятивистской форме. Сразу нескольку физиков (Г. Лоренц, Д. Гильберт, А. Эйнштейн, А. Пуанкаре) выяснили, что для построения такой теории достаточно так сформулировать принцип наименьшего действия и выбрать для вариации такую функцию Лагранжа, чтобы они отвечали требованиям релятивисткой инвариантности. Пуанкаре объединил интегрирование по пространству и времени и записал принцип Гамильтона в таком виде, из которого не только легко получаются уравнения Максвелла, но его можно применять для теоретического построения теории относительности [1, с. 71].

Для нахождения уравнений электромагнитного поля, функцию Лагранжа в принципе Гамильтона выразили через разность квадратов векторов напряженности электрического поля *E* и магнитного поля *H*. Магнитная энергия выступала аналогом кинетической, а электрическая – аналогом потенциальной энергии. Тогда действительное свободное электромагнитное поле (изменение распределения потенциалов в пространстве) отличается от всех возможных тем, что его действие $S_f$ стационарно и имеет минимум:

$$S_f = \min, \ \delta S_f = 0, \ S_f = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V (E^2 - H^2) dV dt.$$

Для 4-мерного пространства-времени лагранжиан стали интегрировать не только по пространству, но и по времени. С релятивисткой точки зрения действие Гамильтона имеет смысл произведения плотности материи и плотности поля на четырехмерный объем пространства-времени [3, с. 857]. То же выражение можно записать в 4-мерной форме (в гауссовой системе координат) [10, с. 102]:

$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int\limits_\Omega F_{ik} F^{ik} d\Omega, \ d\Omega = c dt dV$, где $F^{ik}$ – тензор электромагнитного поля.

В 1906 году Макс Планк записал **принцип наименьшего действия для релятивистского движения частицы в поле консервативной силы**, по которому действительная траектория заряженной частицы из одного состояния в другое за один и тот же промежуток времени отличается от всех возможных траекторий тем, что сумма действия частицы $S_m$ и действия ее взаимодействия с полем $S_{mf}$ стационарна и имеет минимум:

$$S = \min,\ \delta S = 0,\ S = S_m + S_{mf},\ S = \int [-mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - V]dt,$$

где $m$ – масса покоя частицы, $v$ – ее скорость, $V$ – потенциал поля, зависящий от положения частицы.

Экстремальный **принцип для свободной релятивистской частицы** формулируется так: действительная траектория движения свободной частицы из состояния $e_1$ в состояние $e_2$ за один и тот же промежуток времени отличается от всех возможных траекторий тем, что ее действие $S_m$ стационарно и имеет локальный минимум [10, с. 45]:

$$S_m = \min,\ \delta S_m = 0,\ S_m = -mc^2\int_{e_1}^{e_2} d\tau = -mc\int_{e_1}^{e_2} ds = -mc^2\int_{e_1}^{e_2}\sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt,$$

где $\tau$ – собственное время частицы, $t$ – время системы отсчета, $ds$ – элемент мировой линии, $c$ – скорость света.

Если пренебречь релятивистским изменением массы частицы и поменять знак на противоположный, ее действие будет максимально:

$$S_m = \max,\ S_m = \tau = \int_{e_1}^{e_2} d\tau.$$

Последнее выражение имеет механические аналоги – принципы Герца и Гаусса, а также волновой аналог – принцип Ферма. Оно может быть интерпретировано как **принцип стационарности собственного времени** или **принцип максимального старения** [33], согласно которому действительная траектория свободной частицы отличается от всех возможных тем, что собственное время или скорость «старения» частицы стационарны, в данном случае – максимальны. При этом длина мировой линии минимальна. По словам Э. Тейлора используя метрику и принцип максимального собственного времени, можно исследовать большие области общей теории относительности, в том числе звезды или черные дыры без тензоров или уравнений поля. Для низких скоростей и слабых гравитационных эффектов принцип максимального собственного времени упрощается до нерелятивистского принципа наименьшего количества действия, механика Ньютона, таким образом, становится частным случаем релятивистской механики [32].

Для траектории заряженной частицы в электромагнитном поле суммарное действие принимает вид:

$$S = S_m + S_{mf} = \int_{e_1}^{e_2} \left( -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - \left[ \rho\varphi - \frac{1}{c} jA \right] \right) dt,$$

где $\rho$ – объемная плотность заряда, $\varphi$ – скалярный потенциал поля, $A$ – векторный потенциал поля, $j$ – вектор плотности тока.

То же условие можно записать в 4-мерной форме, добавив действие поля $S_f$ [10, с. 105]:

$$S = S_f + S_m + S_{mf},\ \ S = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik} d\Omega - \sum mc\int ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega,$$

где $A_i$ – 4-потенциал поля, $j^i$ – 4-вектор плотности тока.

Уравнения гравитационного поля были практически одновременно выведены в 1915 году, 20 ноября Давидом Гильбертом из принципа наименьшего действия и 25 ноября Альбертом Эйнштейном из принципа общей ковариантности уравнений гравитационного поля. Работа Гильберта была опубликована позднее Эйнштейна, который затем посвятил отдельную статью выводу уравнений общей теории относительности из принципа Гамильтона [3, с. 599]. **Принцип наименьшего действия для гравитационного поля** можно сформулировать так: действительное гравитационное поле (распределение гравитационных потенциалов в пространстве) отличается от всех возможных тем, что сумма его действия $S_g$ и действия материи $S_m$ – массивных частиц и негравитационных полей – стационарно и имеет минимум:

$$S = \min,\ \delta S = 0,\ S = S_g + S_m,\ S_g = -\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\, d\Omega, S_m = -\frac{1}{2c}\int T_{ik} g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega,$$

где $G$ – гравитационная постоянная Ньютона, $R$ – скалярная кривизна пространства-времени, $g$ – определитель матрицы матричного тензора, $T_{ik}$ – тензор энергии-импульса [10, с. 361-372].

Таким образом, от всех возможных 4-мерных пространств реально существующий мир отличается тем, что в любой его области действие принимает экстремальное значение [4, с. 522]. Позднее А. Эйнштейн, Г. Вейль, А. Эддингтон и другие, опираясь на принцип Гамильтона, попытались создать единую теорию поля, однако не смогли достичь этого, в том числе потому, что не принимали во внимание вероятностный характер поведения квантовых микрообъектов [1, с. 73]. В этом преуспела квантовая механика.

В современной космологии принцип наименьшего действия стал использоваться для расчета движения систем, состоящих из N-космических тел [25]. Зная современное распределение массы в расширяющейся Вселенной и используя принцип наименьшего действия, астрономы научились рассчитывать прошлые орбиты галактик [29].

**Экстремальные принципы в квантовой механике.**

Макс Планк предположил, что действие, которое используется в принципе наименьшего действия – величина прерывная. Арнольд Зоммерфельд обратил внимание на то, что термин «квант действия» говорит о связи с понятием действия в принципе наименьшего действия так, что при каждом чисто молекулярном процессе каждая молекула воспринимает или отдает определенное универсальное количество действия [3, с. 779], а именно:

$\int_0^\tau L dt = h/2\pi$, где $h$ – постоянная Планка, $\tau$ – длительность процесса.

В 1913 году Нильс Бор, используя понятие кванта действия, создает новую модель атома. Луи Де Бройль, опираясь на работы Гамильтона по оптико-механической аналогии и идентичность принципа наименьшего действия и принципа Ферма, объединяет понятия волн и квантов. Он приходит к выводу, что динамически возможные траектории движущегося тела совпадают с возможными лучами фазовой волны [3, с. 861]. Он предположил, что квант действия служит соединительным звеном между корпускулярным и волновым представлениями о материальных частицах [9, с. 135]. Эрвин Шредингер пришел к выводу, что если принцип Гамильтона рассматривать как принцип Ферма для распространения волн в конфигурационном пространстве [3, с. 691], то уравнение Гамильтона будет выражать принцип Гюйгенса для таких волн, а функция действия будет играть роль фазы волны. Гюйгенс в свое время объяснял распространение фронта волны, воображая, что каждая точка фронта испускает малую сферическую волну. Эти малые волны суммируются (интерферируют) и в дальнейшем воссоздают фронт основной волны, а все прочие колебания малых волн просто гасят друг друга.

Шредингер считал, что «лучи» или ортогональные траектории волновых поверхностей можно рассматривать как пути движения системы с энергией $E$ в соответствии с уравнениями Гамильтона-Якоби [1, с. 89]. Воспользовавшись идеями Де Бройля, Шредингер получил свое волновое уравнение, вводя в макроскопическую физику понятия длины волны и амплитуды [3, с. 862]. Для этого Шредингер ввел некую абстрактную волновую функцию $\psi$, выразив ее через действие Гамильтона:

$S = K \ln \psi$, где $K$ – коэффициент с размерностью действия.

Шредингер был уверен, что варьирование интеграла его волновой функции позволит вывести уравнение квантовой механики. В результате он сформулировал вариационный принцип для волновой функции. Макс Борн позже предположил, что смысл уравнения Шредингера и его волновой функции состоит в том, что они определяет вероятность любого варианта хода событий в механическом процессе.

Следующим логичным шагом было объединить принцип Гамильтона и вероятностное описание квантовых событий. Но в определении лагранжиана, входящего в вариационные принципы обычного поля возникает проблема. Дело в том, что состояние квантовой системы является суперпозицией множества состояний со своими значениями координат и импульсов, входящих в лагранжиан, и не имеющих однозначной взаимной связи, поскольку они подчиняются соотношению неопределенности Гейзенберга. Эта проблема частично была решена в квантовой электродинамике, описывающей взаимодействие электромагнитного поля с электроном. Действительное движение электрона, точнее электронно-позитронной пары в электромагнитном поле из одного состояния в другое отличается от всех возможных тем, что сумма действий частицы, поля и их взаимодействия стационарна и имеет минимум. Соответственно плотность лагранжиана также состоит из трех слагаемых, относящихся к свободной частице $L_m$, электромагнитному полю (фотону) $L_f$ и взаимодействию частицы и поля $L_{mf}$:

$$L = L_m + L_{mf} + L_f \quad .$$

Поль Дирак предложил каждую отдельную возможную эволюцию квантовой системы из одного состояния в другое описывать с помощью оператора, содержащего функцию, эквивалентную классическому действию и имеющей смысл фазы волны вероятности. Ричард Фейнман в 1940-х годах использовал идеи Гюйгенса и Дирака, и предложил новый подход к квантовой физике. Он предположил, что квантовая частица одновременно движется по всем возможным траекториям, но волны вероятности гасятся в точке прибытия так, что максимальная вероятность падает на узкий пучок траекторий вокруг действительного пути, для которого вариация действия равна нулю. Для нахождения стационарной траектории системы из одного состояния в другое Фейнман предложил вместо варьирования вдоль единственной траектории, суммировать вклады в полную амплитуду вероятности от всех возможных траекторий. Полученная таким образом максимальная амплитуда вероятности и даст действительную траекторию системы.

Фейнман сформулировал квантовомеханическое правило вычисления амплитуды вероятности. Необходимо установить, какой вклад вносит каждая траектория в полную амплитуду вероятности перехода системы из точки $a$ в точку $b$. Важно, что вклад дают сразу все траектории, а не только та, которая соответствует экстремальному действию. При этом вклады отдельных траекторий равны по величине, но различаются значением фазы. Таким образом, вероятность $p$ перехода частицы из точки $a$ в точку $b$ равна квадрату модуля амплитуды вероятности этого перехода [22, с. 41]:

$p(b,a) = |K(b,a)|^2$, где $K$ – функционал, называемый пропагатором.

Смысл пропагатора состоит в том, что он описывает волновую функцию в момент $t_2$ через волновую функцию в момент $t_1$ [22, с. 90]. Амплитуда вероятности представляет собой сумму вкладов (фаз) амплитуд вероятности от каждой траектории в отдельности, где суммирование исполняется по всем траекториям, соединяющим точки $a$ и $b$:

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{возможным} \\ \text{переходам} \\ \text{из a в b}}} \varphi$$

Фаза каждой траектории пропорциональна действию $S$ – тому же самому, что и в случае соответствующей классической системы, но выраженному в единицах кванта действия $\hbar$:

$$\varphi = const \cdot e^{iS/\hbar}.$$

В классическом пределе, когда величина действия много больше кванта действия $S >> \hbar$ или длина волны частицы существенно меньше размеров самой частицы, достаточно учитывать только одну – классическую траекторию с классическим действием, поскольку фазы всех остальных траекторий взаимно компенсируют друг друга [22, с. 43]. Результирующей траектории будет соответствовать максимальная вероятность. В результате интеграл по траекториям можно записать [22, с. 48]:

$$K(b,a) = \int_a^b e^{iS(x)/\hbar} Dx(t), \ S(x) = \int_{t1}^{t2} L[x(t)]dt,$$

где $D$ – означает суммирование по всем возможным траекториям из $a$ $(t_1)$ в $b$ $(t_2)$, для каждой из которых величина действия имеет свое значение, $S$ – действие для отдельной траектории.

Свой подход Фейнман применил к квантовой электродинамике, поскольку его «интеграл по траекториям» применим к квантовому описанию как точечных частиц в обычном пространстве, так и полей в конфигурационном пространстве. Для расчета вероятности состояния (траектории) электрона в электромагнитном поле, необходимо рассчитать амплитуды вероятности всех возможных состояний (траекторий) и просуммировать их фазы. Для этого необходимо использовать действия вещества $S_m$, поля $S_f$, и взаимодействия вещества и поля $S_{mf}$ [22, с. 285]. Полученное распределение вероятностей будет соответствовать действительному состоянию (траектории). Можно сказать, что чем выше вероятность состояния (траектории), тем ближе оно к наблюдаемому:

$$p \to \max,\ p = |K|^2,\ K = \int e^{i(S_m + S_{mf} + S_f)/\hbar} DqDAD\varphi\ ,$$

где $Dq$ – означает суммирование по всем возможным траекториям, а $DA$, $D\varphi$ – суммирование по всем возможным полям.

Данная формула является фундаментальным принципом квантовой электродинамики, но в случае, когда величина действия много больше постоянной Планка, а размеры частицы существенно больше ее длины волны, максимальная вероятность и минимальное действие соответствуют действительному классическому состоянию (траектории):

$$p = \max,\ S = \min\ .$$

Метод «интегралов по траекториям» эквивалентен волновому уравнению Шредингера, но в отличие от последнего физический смысл нового подход интуитивно более понятен. На основе «интегралов по траекториям» в 1949 году была разработана техника «диаграмм Фейнмана», являющаяся на сегодня самым наглядным и эффективным способом описания взаимодействия в квантовой теории поля. Именно формулировка Фейнмана стала «незаменимой частью инструментария каждого физика, использующего квантовую теорию поля» [2, с. 403].

Сегодня принцип наименьшего действия используется в космологической теории струн. Если свободные частицы движутся вдоль геодезических линий в искривленном пространстве, то струна движется в пространстве вдоль мирового листа или по мировой трубе. Для расчета траектории движения струн минимизируется естественный аналог длины пути — площадь трубы, при этом используется тот же метод Фейнмана, что и для обычных частиц [8].

**Выводы.**

Среди ученых распространено мнение, что для экстремальных принципов не существует философских оснований, а сами принципы являются лишь удобным инструментом научного познания. Такого мнения придерживались Ж. Д`Аламбер, Ж. Лагранж, К. Якоби, М. Остроградский, Э. Мах, М. Борн, А. Эйнштейн, И. Пригожин. Современные физики считают, что эти принципы полностью эквивалентны дифференциальным принципам движения и не дают знанию ничего нового [35]. А. И. Липкин пишет о принципе наименьшего действия лишь как о математической форме в рамках вариационного исчисления, о действии, как о математическим объекте, а о методе «интегралов по траекториям» только как о другом математическом представлении уравнения Шредингера [12]. Искусственность постулатов фейнмановской интерпретации критикует Ю. С. Владимиров [6, с. 492]. М. Б. Менский, хотя и защищает многомировую интерпретацию квантовой механики, соглашается с тем, что квантовая система движется «одновременно» по всем возможным путям [13, с. 173]. Ф. Дайсон утверждает, что материя в квантовой механике не есть инертная субстанция, но является активным агентом, постоянно делающим выбор между альтернативными возможностями согласно вероятностным законам [24, p. 5]. Р. Пенроуз, говоря об ожидаемых революционных изменениях во взглядах на онтологию квантовых явлений, указывает, что в них должно быть проявлено уважение к высокоорганизованной лагранжево-гамильтоново геометрической структуре ньютоновской теории [14, с. 661]. Дж. Огборн и Э. Тейлор [30; 33] демонстрируют способ вывода механики Ньютона и общей теории относительности из «интегралов по траекториям» квантовой механики. М. Шарлов отстаивает реалистическую интерпретацию «интегралов по траекториям», где частицы действительно следуют по всем возможным траекториям, вносящим вклад в интеграл [31]. М. Валенте, как и Р. Фейнман считает, что виртуальные частицы в диаграммах Фейнмана отражают реальные процессы взаимодействия частиц, которые, однако, не следует рассматривать как процессы в пространстве-времени [34]. В. Цурек обращает внимание на то, что уравнение Шредингера было выведено из классической механики в форме Гамильтона – Якоби, поэтому не является неожиданностью тот факт, что оно приводит к классическим уравнениям движения, когда $\hbar$ может рассматриваться как малая величина [36].

На основании исторического обзора мы приходим к заключению, что все перечисленные экстремальные принципы могут быть получены друг через друга при разных допущениях, одни являются частными приближениями других. При этом экстремальные принципы одинаково эффективны для классических, релятивистских и квантовых объектов. Все экстремальные принципы можно привести к единой математической записи, в которой функционал $S$ стационарен, принимает экстремальное значение и определяется как интеграл от некого выражения $L$ (лагранжиана) – функции состояния системы. В зависимости от типа изучаемого объекта интегрирование может проводиться по времени $t$, по пути $s$, по объему $V$ или по 4-мерному пространству-времени $\Omega$:

$$S = \min(\max),\ \delta S = 0,\ S = \int_{t1}^{t2} Ldt,\ S = \int_{A}^{B} Lds,\ S = \int_{V} LdV,\ S = \int_{\Omega} Ld\Omega\,.$$

Моя гипотеза состоит в том, что связь экстремальных принципов друг с другом основана не столько на стремлении нашего рассудка сводить явления к простым моделям, а расчеты к удобной форме, сколько на реальном единстве всех форм физического движения. Не обязательно ссылаться на стремление материи к экстремальным состояниям или к равновесию, достаточно смысл операции варьирования на макроскопическом уровне представить как частный случай операции интегрирования по всем возможным траекториям (состояниям) на уровне квантовом. Тогда процедура возведения в квадрат суммы амплитуд вероятностей всех траекторий (состояний) со своими действиями $S_{траект.}$ будет символизировать переход с квантового на классический уровень. Минимумы и максимумы функционалов в разных экстремальных принципах становятся частным выражением максимума квантовой вероятности:

$$p = \max,\ p = \left| \int_a^b e^{iS_{траект.}/\hbar} Dx \right|^2,\ S_{траект} = \int_{t1}^{t2} L dt.$$

Тогда обобщенная вероятностная формулировка экстремальных принципов может иметь следующий вид – *действительное движение или состояние системы отличается от всех возможных при данных граничных условиях тем, что вероятность этого движения или состояния максимальна*. С точки зрения квантовой механики, физический смысл этого принципа означает, что объекты «перемещаются» (в n-мерном пространстве-времени) по всем возможным траекториям. Эти траектории интерферируют друг с другом. В результате в 4-х мерном пространстве-времени действительной становится та траектория, квантовая вероятность которой максимальна, что проявляется в стационарности и экстремальности основных классических и релятивистских характеристик этой траектории.

## Список использованной литературы.


1. **Ассеев В. А.** Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. Л.:ЛГУ, 1977. 232 с.
2. **Вайнберг С.** Мечты об окончательной теории: Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. М.: Едиториал УРСС. 2004. 256 с.
3. **Вариационные принципы механики** / ред. Л. С. Полак. М.: Физматгиз, 1959.
4. **Вейль Г.** Гравитация и электричество // Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979. 592 с.
5. **Визгин В. П.** Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // Философия физики: Актуальные проблемы. Материалы научной конференции 17-18 июня 2010 года. М.:ЛЕНАНД, 2010. 400 с.
6. **Владимиров Ю. С.** Метафизика. М.: БИНОМ, 2009.
7. **Голицын Г. А., Левич А. П.** Вариационные принципы в научном знании // Философские науки. 2004. №1, С. 105–136.
8. **Гросс Д.** Грядущие революции в фундаментальной физике [Электронный ресурс]: Интервью порталу «Элементы». URL: http://elementy.ru/lib/430177 (дата обращения 01.10.2012).
9. **Де Бройль Л.** Революция в физике. М.: Атомиздат, 1965. 234 с.
10. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля / Теоретическая физика: в 10-ти т. М.: Физматлит, 2003. Т 2. 534 с.

11. **Ланцош К.** Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1965. 408 с.
12. **Липкин А. И.** Место понятий и принципов «парящих над» отдельными разделами физики // Актуальные вопросы современного естествознания. 2010. Вып. 8. С. 51-58.
13. **Менский М. Б.** Человек и квантовый мир. Фрязино: Век2, 2005. 320 с.
14. **Пенроуз Р.** Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. М.-Ижевск: ИКИ, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 912 с.
15. **Полак Л. С.** Вариационные принципы механики их развитие и применения в физике. М: ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.
16. **Разумовский О. С.** От конкурирования к альтернативам: экстремальные принципы и проблема единства научного знания. Новосибирск: Наука, 1983. 225 с.
17. **Разумовский О. С.** Современный детерминизм и экстремальные принципы в физике. М.: Наука, 1975. 248 с.
18. **Терехович В. Э.** Интерференция возможностей или как «интегралы по траекториям» объясняют вероятностную причинность // Философия науки. Новосибирск: СО РАН. 52 №2. 2012. С. 108-120.
19. **Фейнман Р.** Характер физических законов: Пер. с англ. М.: Наука, 1987. 160 с.
20. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике. Вып. 3: Излучения. Волны. Кванты. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
21. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6: Электродинамика. М.: Едиториал УРСС, 2004. 352 с.
22. **Фейнман Р., Хибс А.** Квантовые интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
23. **Цехмистро Л. Н.** Эволюция и методологическое значение понятия действия в физике: дисс. канд. филос. наук: 09.00.08 / Харьковский инженерно - педагогический ин-т. Харьков, 1992.
24. **Dyson F.** Infinite in all direction. N.Y., 1988.
25. **Giavalisco M., Mancinelli B., Mancinelli P.J., Yahil A. //** ApJ. 1993. 411. 9.
26. **Hanc J., Taylor E. F.** From Conservation of Energy to the Principle of Least Action: A Story Line. // Am. J. Phys. 2004. 72 (4). P. 514–521.
27. **Katzav J.** Dispositions and the principle of least action // Analysis 2004. 64 (3). P. 206–214.
28. **Lemons D. S.** Perfect form: Variational principle, methods, and applications in elementary physics. Princeton University Press, Princeton, 1997.
29. **Nusser A. and Branchini E.** On the least action principle in cosmology // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2000. 313. P. 587–595.
30. **Ogborn J., Taylor E. F.** Quantum physics explains Newton's laws of motion // Physics Education. 2005. №40. Is. 1.
31. **Sharlow M.** The Quantum Mechanical Path Integral: Toward a Realistic Interpretation. 2007. [Электронный ресурс]. URL: http://philsci-archive.pitt.edu/3780 (дата обращения 01.10.2012).
32. **Taylor E. F.** A call to action // American Journal of Physics. 2003. Vol. 71. Is. 5.
33. **Taylor E. F., Wheeler J. A.** Spacetime Physics. Freeman, New York. 1992.
34. **Valente M. B.** Are Virtual Quanta Nothing but Formal Tools? // International Studies in the Philosophy of Science. 2011. 25 (1). P. 39–53.
35. **Yourgrau W. and Mandelstam S.** Variational principles in dynamics and quantum theory. Pitman, London. 2000.
36. **Zurek W. H.** Decoherence and the Transition From Quantum to Classical. 1991. Phys. Today 44 (10):36.